

CONVERTITORI DAC A RESISTORI PESATI

Questi dispositivi permettono di passare dal valore digitale a quello analogico.

Supponiamo che il range delle tensioni misurabili con questo dispositivo vada da 0 V fino ad un valore massimo di 10 V (chiamato **valore di fondo scala**).

Supponiamo, quindi, un $V_{FS} = 10\text{ V}$ e supponiamo di avere un numero binario a **3 bit** ($n = 3$).

Il problema che ci poniamo è quello di capire come si fa a trasformare un valore di n bit (esempio: 3 bit) in una tensione 0 – 10 V?

Con $n = 3$ possiamo ottenere 2^3 combinazioni (vedi tabella sottostante):

b2	b1	b0	Y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

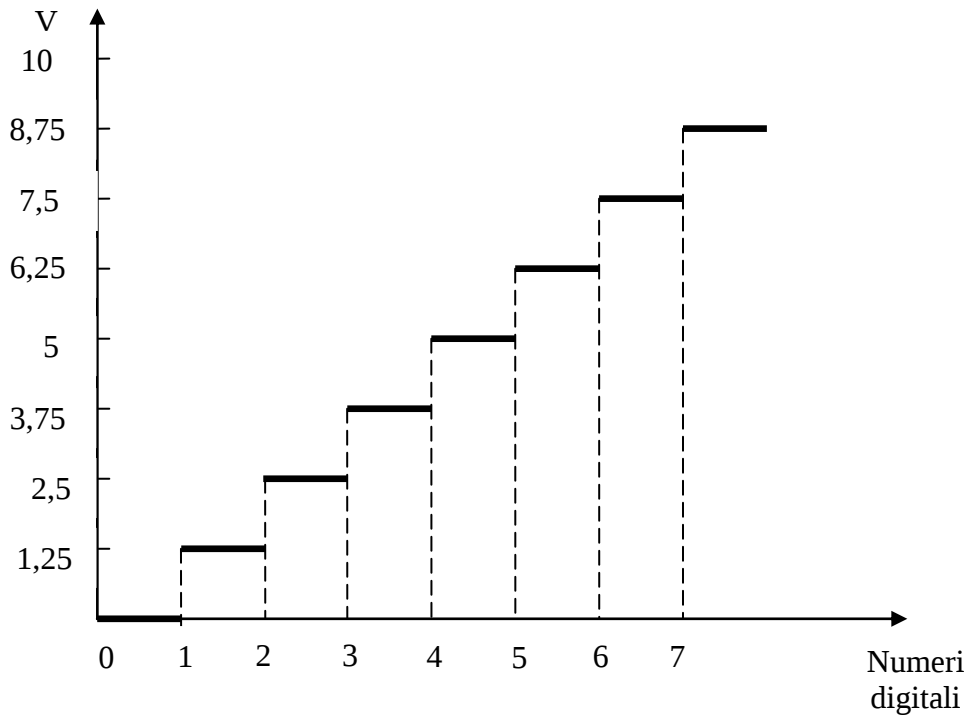
Dobbiamo associare alla scala dei numeri digitali la scala 0 – 10 V.

PROCEDIAMO e realizziamo il grafico associato:

- 1) Troviamo il valore minimo della conversione da associare a ciascun bit. Questo valore è detto **quantum (Q)**.

$$Q = \frac{V_{FS}}{2^n} = \frac{10V}{8} = 1,25V$$

2) Realizziamo il grafico di conversione da digitale (che sono gli ingressi e vanno sull'asse delle ascisse) ad analogico (le uscite che vanno sull'asse delle ordinate).



3) Il diagramma è a gradini (i gradini hanno tutti la stessa altezza pari a $Q = 1,25$ V). Per far diminuire l'altezza tra i gradini, bisogna aumentare il numero di bit: in questa maniera il valore del quantum diminuisce.

Vediamo ora con quale circuito si realizza la conversione da DIGITALE AD ANALOGICO. Bisogna usare il **circuito convertitore a resistore pesato**.

Supponiamo di avere a disposizione 3 bit. Ogni bit può assumere due valori logici:

- 0 (ad esso corrisponde una tensione di 0V);
- 1 (ad esso corrisponde una tensione di 5 V).

Indicando con **b** un generico bit, la tensione associata ad esso si trova tramite la seguente formula:

$$V_b = V_{CC} \cdot b$$

$$\text{se } b = 0 \Rightarrow V_b = 0V$$

$$\text{se } b = 1 \Rightarrow V_b = 5V$$

Progettiamo, ora, il nostro **CIRCUITO A RESISTENZE PESATE** usando un **Amplificatore operazionale invertente** (in modo da avere l'uscita con il segno -).

L' A.O. invertente fornisce in uscita:

- $V_0 = -1,25V$ quando l'ingresso $V_{b0} = 5V$
- $V_0 = 0V$ quando l'ingresso $V_{b0} = 0V$

NOTA: come facciamo a sapere che l'uscita $V_0 = -1,25V$ per il bit b_0 ? Si procede così: al bit b_0 è associato il peso 2^0 ; $2^0=1$; si va sul grafico e si trova sull'ordinata la tensione associata al valore digitale 1; questa tensione vale proprio $V_0 = -1,25V$

L' A.O. invertente fornisce in uscita:

- $V_0 = -2,5V$ quando l'ingresso $V_{b1} = 5V$;
- $V_0 = 0V$ quando l'ingresso $V_{b1} = 0V$

NOTA: come facciamo a sapere che l'uscita $V_0 = -2,5V$ per il bit b_1 ? Si procede così: al bit b_1 è associato il peso 2^1 ; $2^1=2$; si va sul grafico e si trova sull'ordinata la tensione associata al valore digitale 2; questa tensione vale proprio $V_0 = -2,5V$

L' A.O. invertente fornisce in uscita:

- $V_0 = -5V$ quando l'ingresso $V_{b2} = 5V$;
- $V_0 = 0V$ quando l'ingresso $V_{b2} = 0V$

NOTA: come facciamo a sapere che l'uscita $V_0 = -5V$ per il bit b_2 ? Si procede così: al bit b_2 è associato il peso 2^2 ; $2^2=4$; si va sul grafico e si trova sull'ordinata la tensione associata al valore digitale 4; questa tensione vale proprio $V_0 = -5V$

Ora risolviamo il nostro circuito; risolverlo vuol dire trovare il **valore delle resistenze associate ai bit**. Supponiamo **$R_f = 16\text{ K}\Omega$** .

Il nostro CIRCUITO A RESISTORI PESATI è realizzato con un **A.O. in configurazione invertente** per cui avremo che:

$$V_0 = -V_{b_0} \cdot \left(\frac{R_f}{R_0} \right) - V_{b_1} \cdot \left(\frac{R_f}{R_1} \right) - V_{b_2} \cdot \left(\frac{R_f}{R_2} \right)$$

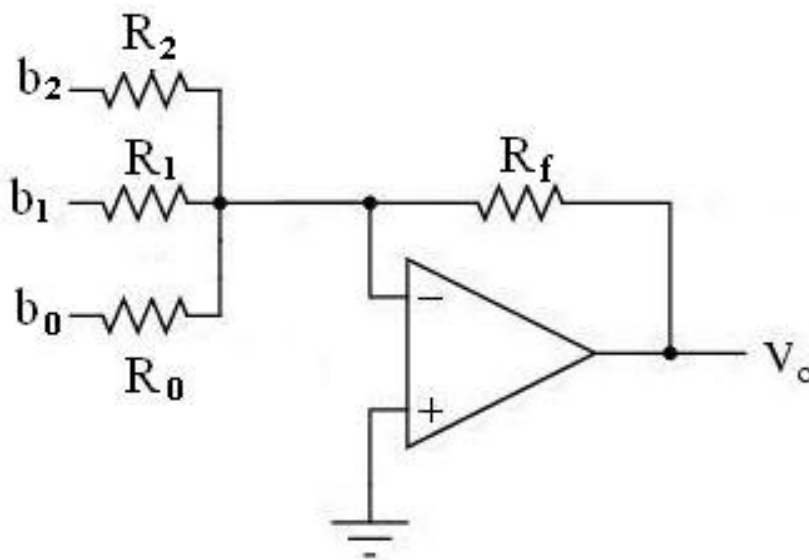
$$V_0 = -V_{b_0} \cdot \left(\frac{R_f}{R_0} \right) \Rightarrow -1,25V = -5V \cdot \left(\frac{16K\Omega}{R_0} \right) \Rightarrow R_0 = 64K\Omega$$

$$V_0 = -V_{b_1} \cdot \left(\frac{R_f}{R_1} \right) \Rightarrow -2,5V = -5V \cdot \left(\frac{16K\Omega}{R_1} \right) \Rightarrow R_1 = 32K\Omega$$

$$V_0 = -V_{b_2} \cdot \left(\frac{R_f}{R_2} \right) \Rightarrow -5V = -5V \cdot \left(\frac{16K\Omega}{R_2} \right) \Rightarrow R_2 = 16K\Omega$$

Quindi:

$$R_f = 16K\Omega \quad R_0 = 64K\Omega \quad R_1 = 32K\Omega \quad R_2 = 16K\Omega$$



ORA CERCHIAMO DI TROVARE UNA FORMULA GENERALE, CHE CI PERMETTA DI CALCOLARE L'USCITA V_0 IN UN CONVERTITORE DAC A RESISTENZE PESATE AD n BIT.

Scriviamo l'uscita dell'A.O. in questo modo:

$$V_0 = -V_{b0} \cdot \left(\frac{R_f}{R_0}\right) - V_{b1} \cdot \left(\frac{R_f}{R_1}\right) - V_{b2} \cdot \left(\frac{R_f}{R_2}\right) = -(V_{CC} \cdot b_0) \cdot \left(\frac{R_f}{R_0}\right) - (V_{CC} \cdot b_1) \cdot \left(\frac{R_f}{R_1}\right) - (V_{CC} \cdot b_2) \cdot \left(\frac{R_f}{R_2}\right)$$

$$V_0 = -(V_{CC} \cdot R_f) \cdot \left(\frac{b_0}{R_0} + \frac{b_1}{R_1} + \frac{b_2}{R_2}\right)$$

sostituendo i valori trovati nell'esercizio precedente, avremo :

$$V_0 = -(5V \cdot 16K\Omega) \cdot \left(\frac{b_0}{64K\Omega} + \frac{b_1}{32K\Omega} + \frac{b_2}{16K\Omega}\right)$$

moltiplichiamo la parentesi per 64 e dividiamo fuori per 64; otteniamo :

$$V_0 = -\left(\frac{5V \cdot 16K\Omega}{64K\Omega}\right) \cdot \left[\left(\frac{b_0}{64K\Omega} + \frac{b_1}{32K\Omega} + \frac{b_2}{16K\Omega}\right) \cdot 64K\Omega\right]$$

$$V_0 = -\left(\frac{5}{4}V\right) \cdot (1b_0 + 2b_1 + 4b_2) = -\frac{5}{4}V \cdot (2^0 b_0 + 2^1 b_1 + 2^2 b_2) = -Q \cdot \sum_{K=0}^{n-1} 2^K \cdot b_K$$

GENERALIZZANDO, QUINDI, L'USCITA V_0 IN UN DAC A RESISTENZE PESATE AD n BIT VALE:

$$V_0 = -Q \cdot \sum_{K=0}^{n-1} 2^K \cdot b_K$$

OSSERVAZIONI:

Perché si chiama circuito a RESISTENZA PESATA?

Osserviamo il rapporto:

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{64K\Omega}{32K\Omega} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{32K\Omega}{16K\Omega} = 2$$

Ciò vuol dire che il valore della resistenza varia a seconda del bit in questione, infatti, passando dal **bit meno significativo (LSB)** a quello più significativo (**MSB**) bisogna moltiplicare per 2; viceversa, passando dal bit più significativo a quello meno significativo bisogna dividere per $\frac{1}{2}$

RIASSUMENDO: al bit MSB è collegata la resistenza minore e raddoppiandone il valore per il bit successivo si arriva alla fine al bit LSB per il quale la resistenza è 2^{n-1} volte maggiore rispetto alla prima.

PROBLEMI CON QUESTO TIPO DI CONVERTITORI:

I⁰ Problema:

➤ Supponiamo:

$$R_{15} = 1K\Omega;$$

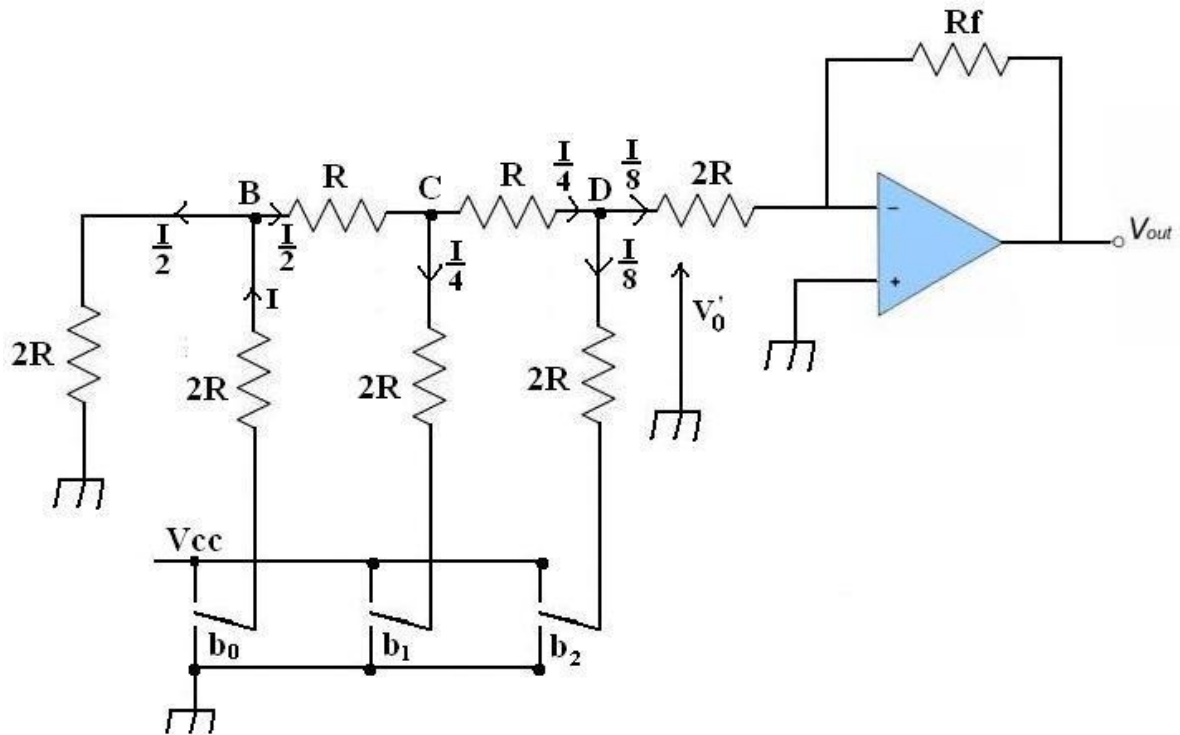
$$n = 16$$

$$R_0 (a\ 16\ bit) = R_{15} \cdot 2^{n-1} = 1K\Omega \cdot 2^{15} = 3,8M\Omega$$

Questo esempio dimostra che il range delle resistenze da utilizzare è troppo ampio (nell'esempio si va da $R_{15} = 1K\Omega$ a $R_0 = 3,8M\Omega$);

II⁰ Problema: Difficoltà di trovare resistenze con valori così diversi e stessa precisione.

CONVERTITORI DAC R – 2R



In questo convertitore usiamo solo 1 resistenza ed il suo doppio:

- sui rami verticali abbiamo la resistenza $2R$;
- sui rami orizzontali abbiamo la resistenza R .

b₀, b₁, b₂ sono i bit; se un bit viene collegato a massa vale 0; se viene collegato alla V_{cc} vale 1.

Supponiamo $b_1 = b_2 = 0$; $b_0 = 1$ e consideriamo la configurazione del circuito senza l'A.O.

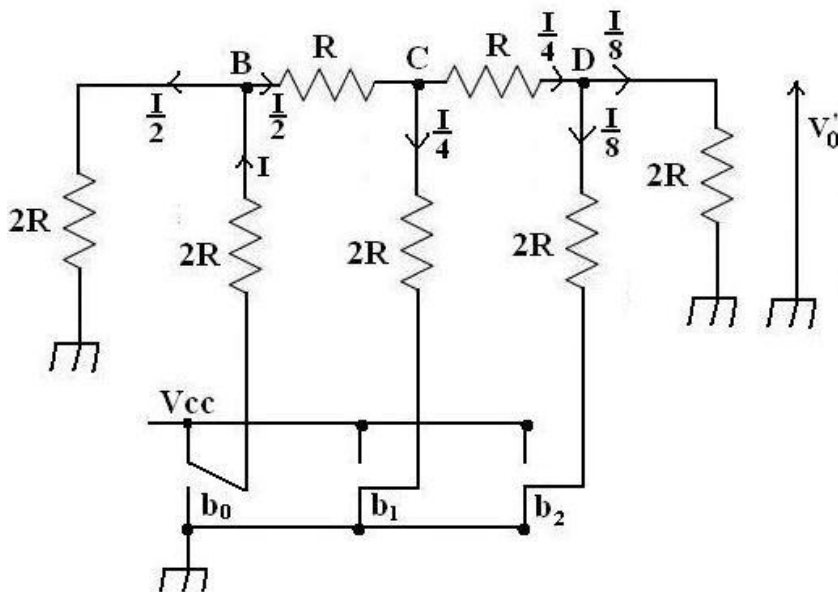


Figura 1

Risolviamo il circuito.

La resistenza $2R$ a destra del nodo D è in parallelo con la resistenza $2R$ collegata al bit b2. Il parallelo fornisce $\frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = \frac{4R^2}{4R} = R$.

Il circuito diventa il seguente:

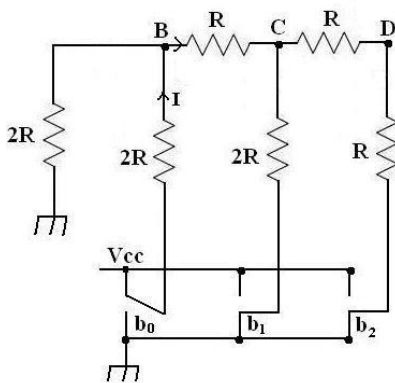


Figura 2

Nel circuito qui sopra, la resistenza R ottenuta dalla prima semplificazione è in serie con la resistenza R del ramo CD. La serie fornisce $2R$. Otteniamo il nuovo circuito semplificato:

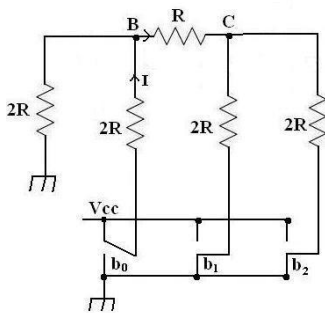


Figura 3

Nel circuito qui sopra, la resistenza $2R$ ottenuta dalla precedente semplificazione è in parallelo con la resistenza $2R$ collegata al bit b1. Il parallelo fornisce R . Otteniamo il nuovo circuito semplificato:

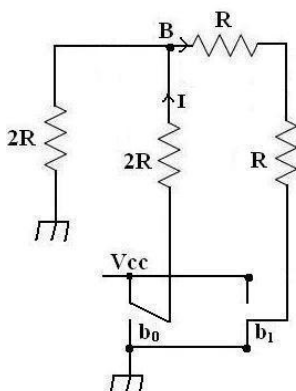


Figura 4

Nel circuito qui sopra, la resistenza R ottenuta dalla precedente semplificazione è in serie con la resistenza R a destra del nodo B . La serie fornisce $2R$. Otteniamo il circuito semplificato qui sotto:

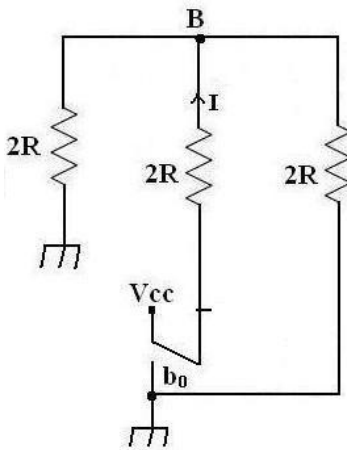


Figura 5

Nel circuito qui sopra la resistenza $2R$ sul ramo a destra del nodo B è in parallelo con quella sul ramo a sinistra del nodo B . il parallelo fornisce R . otteniamo il circuito semplificato sottostante:

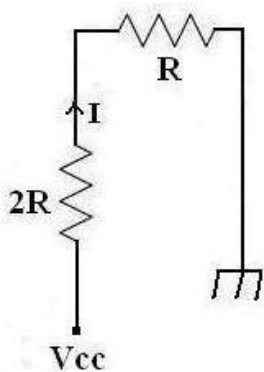


Figura 6

Da questo circuito si ricava che la corrente associata al bit b_0 : $I = \frac{V_{cc}}{3R}$

Con procedimenti analoghi si ricava che, la corrente associata a ciascuno degli altri 2

bit, vale ancora: $I = \frac{V_{cc}}{3R}$

Ora, torniamo al bit $\mathbf{b_0}$ e vediamo il valore della tensione in uscita associata a tale bit.

Il generatore V_{cc} eroga una corrente I . al nodo B (figura 5) questa corrente I incontra due rami (quello a destra e quello a sinistra del nodo) con lo stesso valore di

resistenza ($2R$) e perciò la corrente I si divide in $\frac{I}{2}$. Con analogo ragionamento, si ha

che la corrente $\frac{I}{2}$ al nodo C (figura 3) si divide ancora; quindi avremo $\frac{I}{4}$.

Analogamente al nodo D (figura 1), la corrente $\frac{I}{4}$ si divide e pertanto in uscita

avremo una corrente $\frac{I}{8}$.

Per la legge di Ohm la tensione in uscita V_o' associata al bit b_0 sarà:

$$V'_{0(b0)} = \frac{I}{8} \cdot 2R = \frac{I}{4} \cdot R$$

Con analoghi ragionamenti si ottiene:

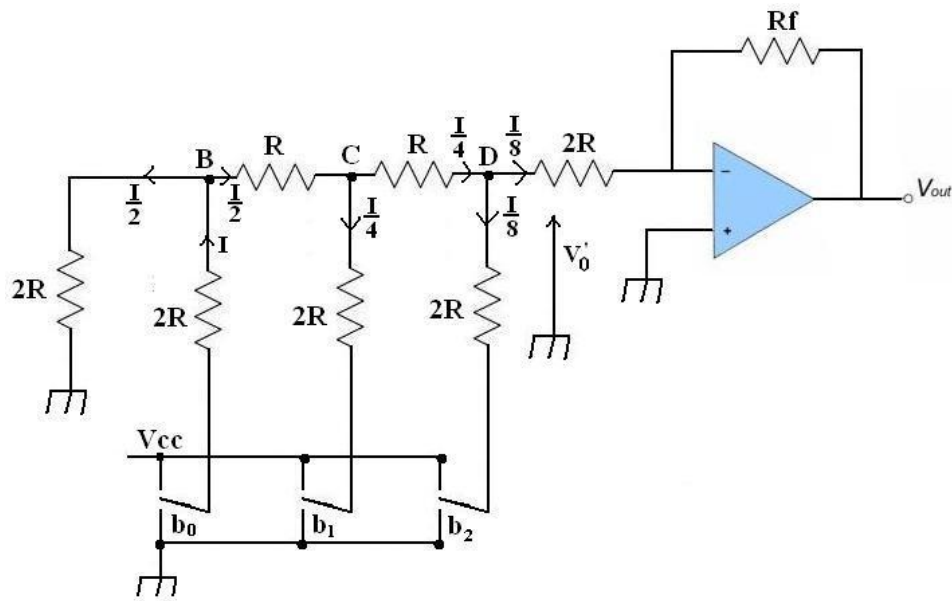
$$V'_{0(b1)} = \frac{I}{4} \cdot 2R = \frac{I}{2} \cdot R$$

$$V'_{0(b2)} = \frac{I}{2} \cdot 2R = I \cdot R$$

Quindi:

$$V'_{0(b0)} = 2V'_{0(b1)} = 4V'_{0(b2)}$$

Consideriamo ora il circuito R – 2R.



$$V_{out} = -V'_0 \cdot \frac{R_f}{2R} \quad I_{tot} = \frac{I}{8} \cdot b_0 + \frac{I}{4} \cdot b_1 + \frac{I}{2} \cdot b_2$$

$$V'_0 = I_{tot} \cdot 2R = \left(\frac{I}{8} \cdot b_0 + \frac{I}{4} \cdot b_1 + \frac{I}{2} \cdot b_2 \right) \cdot 2R = I \cdot \left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} \right) \cdot 2R$$

$$I = \frac{V_{cc}}{3R} \text{ per cui:}$$

$$V'_0 = \frac{V_{cc}}{3R} \cdot \left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} \right) \cdot 2R = \frac{2 \cdot V_{cc}}{3} \cdot \left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} \right)$$

$$V_{out} = -\frac{2 \cdot V_{cc}}{3} \cdot \left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} \right) \cdot \frac{R_f}{2R} = -\frac{V_{cc} \cdot R_f}{3R} \cdot \left(\frac{b_0}{8} + \frac{b_1}{4} + \frac{b_2}{2} \right)$$

Dividendo e moltiplicando per 2^3 , otteniamo:

$$V_{out} = -\frac{V_{cc} \cdot R_f}{2^3 \cdot 3R} \cdot \left(\frac{2^3 b_0}{8} + \frac{2^3 b_1}{4} + \frac{2^3 b_2}{2} \right) = -\frac{V_{cc} \cdot R_f}{2^3 \cdot 3R} \cdot (2^0 b_0 + 2^1 b_1 + 2^2 b_2)$$

$$Q = \frac{V_{cc} \cdot R_f}{2^3 \cdot 3R}$$

GENERALIZZANDO per n bit, avremo:

$$V_{out} = -Q \cdot (2^0 b_0 + 2^1 b_1 + \dots + 2^{n-2} b_{n-2} + 2^{n-1} b_{n-1})$$